Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа 19.03.2016 - V разред

1. Дати квадрат прецртај на папир који ћеш предати, а затим у празна поља упиши бројеве тако да збирови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду једнаки.

1,8		
		0,7
0,4		

2. Одреди цифре x, y и z тако да производ $\overline{13xy}\cdot\overline{5z31}$ буде дељив са 75. Колико решења има задатак?

3. Марко каже Илији: „Ја имам интересантан број телефона. То је седмоцифрен број чије су прве четири цифре међусобно једнаке и остале три цифре међусобно једнаке. Збир свих седам цифара је двоцифрен број чија је прва цифра једнака последњој цифри мог телефонског броја, а друга цифра тог броја је једнака првој цифри мог телефонског броја." Одреди број Марковог телефона.

4. Под собе облика правоугаоника са страницама не краћим од 20dm, прекривена је цео са 2016 плочица облика квадрата странице 1dm, тако да се плочице не преклапају. Колики најмањи, а колики највећи обим може имати тај правоугаоник?

5. Одреди природне бројеве a, b, c такве да је $a > b > c$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{23}{60}$. Нађи пет решења.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Ако централно поље означимо са x важи да је $1,8 + 0,4 = x + 0,7$, одакле је $x = 1,5$. Како је централно поље 1,5, збир бројева у свакој врсти, колони и дијагонали је 3 пута већи, тј. 4,5. Квадрат има облик као на слици [**прва 2 тачно одређена броја по 6 поена, остали по 2 поена**].

1,8	0,1	2,6
2,3	1,5	0,7
0,4	2,9	1,2

2. Дати производ мора бити дељив са 25 и са 3. Како други чинилац није дељив са 5, следи да је први, па је $y \in \{0, 5\}$ [**4 поена**]. Ако је $y = 0$, мора бити $x \in \{0, 5\}$ [**2 поена**], а ако је $y = 5$, онда је $x \in \{2, 7\}$ [**2 поена**]. Размотримо одговарајућа 4 случаја:
1°) $y = 0$, $x = 5$. Сада $3 \mid 1350$, па је $z \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ [**4 поена**]; 2°) $y = 0$, $x = 0$. Тада $3 \nmid 1300$, па мора да $3 \mid \overline{5z31}$ одакле је $z \in \{0, 3, 6, 9\}$; 3°) $y = 5$, $x = 2$. Слично као у 2°) добијамо $z \in \{0, 3, 6, 9\}$; 4°) $y = 5$, $x = 7$. Слично као у 2°) добијамо $z \in \{0, 3, 6, 9\}$ [**4 поена укупно** за случајеве 2 до 4].
Задатак има $10 + 4 + 4 + 4 = 22$ решења [**4 поена**].

3. (**МЛ 48/5**) Нека је прва цифра x, а последња y. То је број $xxxxyyy$. Збир цифара овог броја једнак је $4x + 3y$ и једнак је $10y + x$. Дакле, $4x + 3y = 10y + x$ [**10 поена**], тј. $3x = 7y$, одакле је $x = 7$, $y = 3$. Марков број телефона је 7777333 [**10 поена**].

4. Површина собе је $2016dm^2$, а како је соба облика правоугаоника и дужине страница су цео број дециметара, димензије собе могу бити 21dm×96dm, 24dm×84dm, 28dm×72dm, 32dm×63dm, 36dm×56dm, 42dm×48dm [**10 поена, 5 ако се наведе први и последњи случај, а недостаје неки од осталих**]. Највећи обим собе је ако су дужине страница 21dm и 96dm и износи 234dm, а најмањи ако су дужине страница 42dm и 48dm и износи 180dm [**10 поена**].

5. Наћи ћемо бројеве x, y, z из скупа {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60} свих делилаца броја 60, такве да је $x < y < z$ и $x + y + z = 23$. За $x = 1$ налазимо две могућности: $y = 2, z = 20$ и $y = 10, z = 12$; за $x = 2$ једина могућност је $y = 6, z = 15$; за $x = 3$ може се узети $y = 5, z = 15$, а за $x = 5$ услове задовољавају $y = 6, z = 12$. Дакле, решења задатка су, на пример:

$$\frac{23}{60}=\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{20}{60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{30}+\frac{1}{3},\quad \frac{23}{60}=\frac{1}{60}+\frac{10}{60}+\frac{12}{60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5},$$
$$\frac{23}{60}=\frac{2}{60}+\frac{6}{60}+\frac{15}{60}=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4},\quad \frac{23}{60}=\frac{3}{60}+\frac{5}{60}+\frac{15}{60}=\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4} \text{ и}$$
$$\frac{23}{60}=\frac{5}{60}+\frac{6}{60}+\frac{12}{60}=\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$$ [**свако тачно решење по 4 поена**].

Напомена: Постоје и друга решења задатка. Признати сваких 5 исправних.