Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

21.04.2007.

5. РАЗРЕД

1. Одредити све природне бројеве a и b такве да је $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2} < \frac{a}{10} < \frac{3}{4}$.
2. Стена у облику коцке чија је дужина ивице 10 m исечена је на једнаке коцкице чије су дужине ивица 1 dm. Ређањем тих коцкица једне поред друге поплочана је правоугаона стаза ширине 1 m. За колико сати би ту стазу прешао пешак који сваког сата прелази 5 km?
3. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $2p+3q+4r = 2006$.
4. При дељењу бројева 287 и 431 са природним бројем n добијају се редом остаци 1 и 2, а при дељењу броја 231 са бројем $n+1$ добија се остатак 3. Одредити све такве бројеве n.
5. Нацртати 6 правих и 7 тачака тако да свака од тих правих садржи тачно 3 од тих тачака.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

5. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Како је $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, а $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, то је $\frac{5}{10} < \frac{a}{10} < \frac{15}{20}$, па је $a = 6$ или $a = 7$. (10 бодова) Заменом ових вредности у једнакост $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ добијамо да је једино решење задатка: $a = 7$, $b = 2$. (10 бодова)
2. Како је 10 m = 100 dm, то је укупно исечено 1 000 000 коцкица. (5 бодова) Да би се поплочала стаза ширине 1 m потребно је поређати једну поред друге 10 коцкица. То значи да је по дужини поређано једна поред друге 100 000 коцкица. (8 бодова) Та стаза је дугачка 100 000 dm, односно 10 km. (5 бодова) Пешак би ту стазу прешао за 2 сата. (2 бода)
3. (МЛ 3, год. 2005/6, стр. 30, зад. 1996) Бројеви $2p$, $4r$ и 2006 су парни, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. (6 бодова) Следи да је $2p + 4r = 2000$, односно $p + 2r = 1000$. Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је и p паран број, па је $p = 2$. (6 бодова) Следи да је $r = 499$. (2 бода) Након провере да је 499 прост број (6 бодова) закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = 2$, $q = 2$, $r = 499$.
4. Остаци при дељењу бројева 287 и 431 са природним бројем n су редом 1 и 2, па следи да n дели бројеве 286 и 429. (2 бода) Како је $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, а $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, то је могуће да је $n = 11$ или $n = 13$ или $n = 143$. (свака пронађена могућност по 3 бода) Провером утврђујемо да се при дељењу броја 231 са бројем $n+1$ добија остатак 3 једино за $n = 11$. (провера сваке од могућности по 3 бода)
5. Једно решење је дато на слици. (20 бодова)