Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа 25.03.2017.

VIII разред

1. Дужина бочне ивице правилне шестостране пирамиде је $\sqrt{39}$cm, а апотема са равни основе заклапа угао од 60°. Колика је запремина те пирамиде?

2. Докажи да не постоје природни бројеви x и y такви да је
$$2015x + y^2 = 2017^{2017}.$$

3. У троуглу ABC је $\measuredangle ABC = 60°$. Симетрала AD угла код A ($D \in BC$) и симетрала CE угла код C ($E \in AB$) секу се у тачки O. Докажи да је $OD = OE$.

4. Колико има тачака у трећем квадранту xOy равни које припадају графику линеарне функције $5x + 11y + 217 = 0$, а чије су обе координате целобројне?

5. Одреди број свих троуглова чије су све странице уједно дијагонале датог конвексног десетоугла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

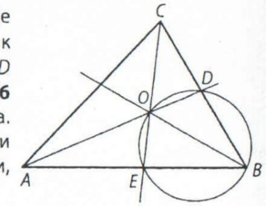
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 51/3**) Нека је S врх пирамиде, O центар основе, E средиште једне основне ивице и, као и обично, a основна ивица, b бочна ивица, h апотема и H висина пирамиде. Тада се добија $OE = \frac{1}{2}SE = \frac{1}{2}h$, $OS = H = \frac{1}{2}h\sqrt{3}$, $a = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$, па из $39 = b^2 = \frac{1}{3}h^2 + \frac{3}{4}h^2 = \frac{13}{12}h^2$ следи $h = 6\text{cm}$ и $a = 2\sqrt{3}\text{cm}$ [**10 поена**]. Сада је $H = 3\sqrt{3}\text{cm}$ [**5 поена**] и $V = 54\text{cm}^3$ [**5 поена**].

2. Претпоставимо да такви бројеви постоје. Последња цифра броја $2015x$ је 0 или 5, а последња цифра броја y^2 не може бити 2 ни 7. Дакле, последња цифра броја на левој страни не може бити 7 [**10 поена**]. Последње цифре бројева 2017^n су, редом, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ..., тј. понављају се с периодом 4, па је последња цифра броја 2017^{2017} иста као за 2017^1, тј. једнака је 7 [**10 поена**]. Зато дата једнакост не може да важи.

3. *Прво решење*. Збир углова код темена A и C у ΔABC једнак је 120°. Следи да је збир углова код истих темена у ΔAOC једнак 60°. Зато је $\measuredangle DOE = \measuredangle AOC = 120°$ [**6 поена**]. Следи да је $BEOD$ тетивни четвороугао (збир углова код темена B и O је 180°) [**6 поена**]. Посматрајмо кружницу k описану око тог четвороугла. Трећа симетрала угла троугла ABC садржи такође тачку O и полови лук ED кружнице k. Како су лукови OD и OE једнаки, следи да су и одговарајуће тетиве OE и OD једнаке [**8 поена**].



Друго решење. Из троугла ABD имамо $\measuredangle ADB = 180° - \left(60° + \frac{\alpha}{2}\right) = 120° - \frac{\alpha}{2}$, . Слично је $\measuredangle CEB = 180° - \left(60° + \frac{\gamma}{2}\right) = 120° - \frac{\gamma}{2}$. Како је $\measuredangle ADB + \measuredangle CEB = 120° - \frac{\alpha}{2} + 120° - \frac{\gamma}{2} = 240° - \frac{\alpha+\gamma}{2} = 180°$ то праве AB и CE заклапају исти угао као и праве BC и AD [**10 поена**]. Нека су F и G подножја нормала из тачке O на праве BC и AB тим редом. $OF = OG$ јер је O центар уписане кружнице, а тачке F и G тачке додира те кружнице и одговарајуће странице троугла ABC. Троуглови OEG и ODF су подударни јер имају по један прав угао, једнаке катете и наспрам те катете једнаке углове. Следи да су им и хипотенузе OE и OD једнаке, одакле следи тврђење задатка [**10 поена**].

4. Из $x = \frac{-11y - 217}{5} = -2y - 43 - \frac{y+2}{5}$ се добија да мора бити $y + 2 = 5z$, где је z цео број, одакле је $y = 5z - 2$, $x = -11z - 39$, $z \in Z$ [**10 поена**]. Обе вредности x и y ће бити негативне за $z \in \{0, -1, -2, -3\}$, тј. тражени број тачака је 4 [**10 поена**] [Одговарајуће тачке су (−39, −2), (−28, −7), (−17, −12), (−6, −17), али их није неопходно наводити. Ако се те тачке наведу, али се не докаже да их нема више бодовати са 10 поена.]

5. *Прво решење*. Укупан број троуглова чија су темена уједно темена датог десетоугла је $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ [**5 поена**]. Међу њима постоји 10 оних чије су две странице уједно (суседне) странице тог десетоугла [**5 поена**], као и $10 \cdot 6 = 60$ оних чија је једна страница уједно страница десетоугла [**5 поена**]. Дакле, тражени број троуглова је $120 - 10 - 60 = 50$ [**5 поена**].

Друго решење. Означимо дати десетоугао са $A_1A_2...A_{10}$. Посматрајмо троуглове чије је једно теме A_1. Ако је друго теме A_3, за треће постоји 5 могућности; ако је друго A_4, постоји 4 могућности; ...; ако је друго теме A_7, постоји само једна могућност (A_9). Дакле, број таквих троуглова је $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ [**10 поена**]. Понављајући овај поступак добија се $15 \cdot 10 = 150$, али тиме је сваки троугао бројан трипут, па је тражени број троуглова $150 : 3 = 50$ [**10 поена**].