Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
27.02.2016.

VIII разред

1. Реши једначину $\left|\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{6-2x}{4}\right|=2.$

2. Правилна тространа призма $ABCA_1B_1C_1$ основне ивице 10cm пресечена је са равни одређеном тачкама A, B и C_1. Ако је површина пресека једнака 60cm^2 одреди запремину призме.

3. Дрвена коцка је обојена споља, а затим исечена на једнаке мале коцке (њих најмање 27). На колико је малих коцки исечена велика коцка ако се зна да међу малим коцкама има исто толико коцки са једном обојеном страном колико и оних код којих ниједна страна није обојена?

4. Тачке A, B и C су са исте стране пројекцијске равни и од ње су удаљене редом 7cm, 17cm и 27cm. Дужина тежишне дужи AD троугла ABC је 25cm. Одреди дужину пројекције дужи AD на ту пројекцијску раван.

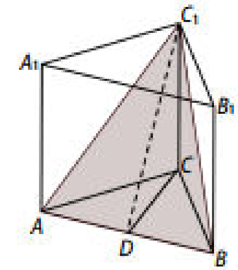
5. Збир 12 различитих природних бројева је 83. Докажи да је производ тих бројева дељив са 420.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

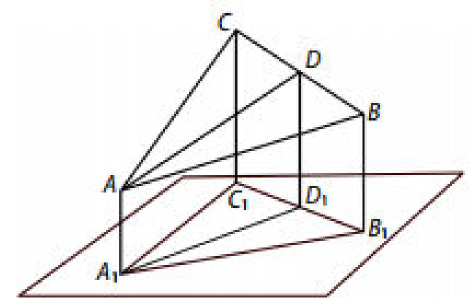
1. **(МЛ 48/1)** Сређивањем добијамо $\left|\dfrac{5x-13}{6}\right|=2$ (**5 поена**). Сада је $\dfrac{5x-13}{6}=2$ или $\dfrac{5x-13}{6}=-2$ (**10 поена**; 0 ако се наведе само једна могућност), одакле је $x=5$ или $x=\dfrac{1}{5}$ (**5 поена**).

2. Нека је D подножје нормале из C_1 на AB. Троугао ABC_1 је једнакокрак и његова површина је $\dfrac{AB\cdot C_1D}{2}=60\text{cm}^2$, одакле је $C_1D=12$cm (**5 поена**). Троугао CDC_1 је правоугли и важи $C_1D^2=CD^2+CC_1^2$. Како је CD висина једнакостраничног троугла то је $CD=5\sqrt{3}$cm, а одатле је $CC_1=\sqrt{69}$cm (**10 поена**). Запремина призме је $75\sqrt{23}\text{cm}^3$ (**5 поена**).



3. Број малих коцки мора бити куб природног броја. Нека је n^3 број малих коцки. Тада је број коцки без иједне обојене стране $(n-2)^3$ (**5 поена**), а број коцки са једном обојеном страном $6(n-2)^2$ (**5 поена**). Следи да је $(n-2)^3=6(n-2)^2$, одакле је $n-2=6$, тј. $n=8$ (**8 поена**). Велика коцка је исечена на $8^3=512$ малих коцки (**2 поена**).

4. **(МЛ 49/2)** Нека су ознаке као на слици. Тада је $AA_1=7$cm, $BB_1=17$cm, $CC_1=27$cm, $AD=25$cm. Четвороугао BB_1C_1C је трапез ($BB_1 \parallel CC1$) па је дужина средње линије $DD_1=22$cm (**7 поена**). Четвороугао ADD_1A_1 је правоугли трапез, а дужина тражене пројекције једнака је страници трапеза A_1D_1. Применом Питагорине теореме на правоугли трапез израчунавамо да је дужина тражене пројекције $A_1D_1^2=AD^2-(DD_1-AA_1)^2$ (**10 поена**), тј. $A_1D_1=20$cm (**3 поена**).



5. $420=3\cdot4\cdot5\cdot7$. Претпоставимо да ниједан од 12 датих бројева чији је збир 83 није дељив са 3. Минимум њиховог збира је $1+2+4+5+7+8+10+11+13+14+16+17=108>83$. Следи да неки од 12 бројева мора бити дељив са 3, па је и њихов производ дељив са 3 (**4 поена**). Аналогно формирајући посебно минимуме збирова бројева који нису дељиви са 4 (96) (**4 поена**), који нису дељиви са 5 (90) (**4 поена**) и бројева који нису дељиви са 7 (84) (**4 поена**) закључујемо да бар неки од бројева морају бити дељиви са 4, са 5 и са 7. Дакле, производ је дељив са 3, 4, 5 и 7 па је дељив и са 420 (**4 поена**).