

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
28.03.2015.

VIII разред

- Тачка A је пресек графика функције $y = \frac{3}{4}x + 12$ са x -осом, а тачка B је пресек графика функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$ са x -осом. Тачка C је пресек та два графика.
 - Докажи да је троугао ABC правоугли;
 - Израчунај обим и површину тог троугла.
- Свака страна коцке подељена је на 9 једнаких квадрата. Да ли је могуће у сваки квадрат уписати неки цео број тако да за сваки квадрат важи: збир пет бројева – броја уписаног у тај квадрат и четири броја уписаних у њему суседне квадрате – једнак је 17? (Два квадрата су суседна ако имају заједничку ивицу, укључујући и случај када ти квадрати не припадају истој страни коцке.)
- У паралелограму $ABCD$ кружница описана око троугла BCD сече дијагоналу AC по други пут у тачки M . Ако је однос површина троугла BDM и паралелограма 1 : 18, одреди однос дужина дијагонала паралелограма.
- Докажи да је број $2015^{12} + 2^{10}$ сложен.
- Дат је правилни тетраедар $ABCD$ чија ивица има дужину a . Раван δ садржи тачку D и пресеца ивице AB и BC тако да је пресек тетраедра и равни δ троугао. Докажи да је обим пресечног троугла већи од $2a$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

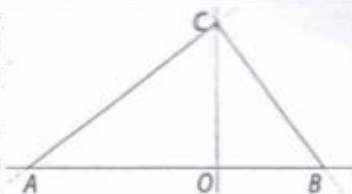
Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

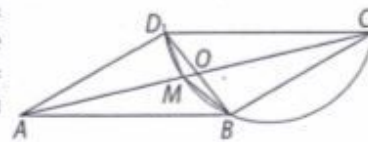
- Координате пресечних тачака су $A(-16, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, 12)$ (5 поена). Дужине страница троугла су $AB = 25\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$ (5 поена).



- Како је $25^2 = 20^2 + 15^2$, троугао ABC је правоугли (5 поена. Признати и ако ученици без израчунавања дужина страница искористе познати услов нормалности две праве у координатном систему.)
- $O = 60\text{cm}$, $P = 150\text{cm}^2$ (5 поена).

- Не. Сваком квадрату суседна су 4 квадрата који с њим образују „крст“. Сваки квадрат укључен је у 5 крстова. Ако је збир бројева у сваком крсту 17, онда је петоструки збир свих написаних бројева $17 \cdot 54$, што је контрадикција, јер тај број није дељив са 5 (20 поена).

- $P_{ABCD} : P_{BDM} = 18 : 1$. Како је $P_{ABCD} : P_{ABO} = 2 : 1$, то је $P_{ABO} : P_{BDM} = 9 : 1$, а одавде је $OA : OM = 9 : 1$ (5 поена). Такође, $\angle DBM = \angle DCM$ (периферијски над истом тетивом) и $\angle BAO = \angle DCM$ (са паралелним крацима) па је $\angle OBM = \angle BAO$ (5 поена) и троуглови OMB и OBA су слични (5 поена). Сада је $OM : OB = OB : OA$, па је $OB^2 = \frac{1}{9} OA^2$, тј. $OB = \frac{1}{3} OA$. Дакле, $AC : BD = 3 : 1$ (5 поена).



- $2015^{12} + 2^{10} = (2015^6 + 2^5)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 2015^6$ (8 поена) $= (2015^6 + 2^5)^2 - (2^3 \cdot 2015^3)^2 = (2015^6 + 2^5 - 2^3 \cdot 2015^3)(2015^6 + 2^5 + 2^3 \cdot 2015^3)$. Дакле, како су оба чиниоца већа од 1, дати број је сложен (12 поена).

- (МЛ 47/4) Посматрајмо правилни тетраедар $ABCD$. Нека равна δ пресеца ивице AB и BC редом у тачкама M и N (слика лево). Ако развијемо мрежу тетраедра (слика десно) онда је јасно да је обим пресечног троугла $O = DM + MN + DN = D_2M + MN + ND_3 > D_2D_3 = 2a$, јер је дуж D_2D_3 најкраће растојање између тачака D_2 и D_3 (20 поена).

