Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа 06.04.2013 – VII разред

1. Ако су x и y природни бројеви и $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$, израчунај $(y - x)^{2013}$.

2. Дата је кружница $k(O, r)$. У кружницу су уписани правилни осмоугао и правилни дванаестоугао. Одреди однос површина ових многоуглова.

3. Одреди све целе бројеве n за које је вредност разломка $\dfrac{3n^2+15}{n+2}$ такође цео број.

4. Од правилног многоугла одсечен је једнакокраки троугао ABC, кога чине три суседна темена. На најдужој страници AC тог троугла постоји тачка K, таква да дуж BK дели троугао ABC на два једнакокрака троугла. Колико страница може да има тај правилни многоугао?

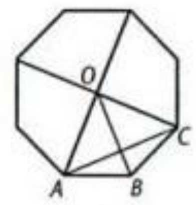
5. У складишту се налази 2013 сулундара. Милашин и Радашин играју следећу игру: они наизменично износе сулундаре из складишта, при чему Радашин сваки пут изнесе 1 или 4 сулундара, а Милашин 2 или 3 сулундара. Први почиње Милашин. Победник је онај који изнесе последњи сулундар. Који од њих двојице може да осигура победу, без обзира како игра његов противник?

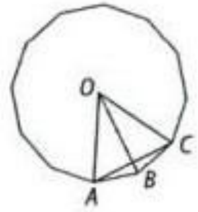
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = y^2$, $y^2 = (x - 1)^2$ (**10 бодова**). Како су x и y природни бројеви, то је $y = x - 1$ (**5 бодова**). Сада је $(y - x)^{2013} = (x - 1 - x)^{2013} = -1$ (**5 бодова**).

2. (МЛ47/3) Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида, па је $P_8 = 4P_d = 4\cdot\dfrac{d_1d_2}{2} = 2d_1d_2$, где су d_1 и d_2 дијагонале делтоида. Једна дијагонала једнака је полупречнику описане кружнице око осмоугла, $d_1 = OB = r$, а друга $d_2 = AC = r\sqrt{2}$. $P_8 = 2d_1d_2 = 2\cdot r\cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r^2$ (**8 бодова**). Слично, површина правилног дванаестоугла је $P_{12} = 6P_d = 6\cdot\dfrac{d_1d_2}{2} = 3d_1d_2$, $d_1 = r$, $d_2 = r$. $P_{12} = 3d_1d_2 = 3r\cdot r = 3r^2$ (**8 бодова**). Однос површина ових многоуглова је $P_8 : P_{12} = \dfrac{2\sqrt{2}r^2}{3r^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $P_8 : P_{12} = 2\sqrt{2} : 3$ (**4 бода**).





3. $\dfrac{3n^2+15}{n+2} = \dfrac{3n^2-12+27}{n+2} = \dfrac{3(n-2)(n+2)}{n+2} + \dfrac{27}{n+2} = 3(n-2) + \dfrac{27}{n+2}$ (**12 бодова**).

Вредност почетног разломка је цео број када је $\dfrac{27}{n+2}$ цео број. Дакле, $n+2 \in \{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$, па је $n \in \{-29, -11, -5, -3, -1, 1, 7, 25\}$ (свако решење по **1 бод**).

4. Постоје два тражена многоугла.

1) Нека је $AB = AK$ и $BK = KC$ (види слику). Означимо углове као на слици. Како је $\angle BAC = \angle BCA$ то је $180° - 4x = x$, па је $x = 36°$. Дакле, унутрашњи угао је $3x = 108°$, па је реч о правилном петоуглу (**14 бодова**).

2) Ако је $AK = BK$ и $CK = KB$ тада је $\angle ABC = 90°$, па је тражени многоугао квадрат (**6 бодова**).

5. Милашин. Првим потезом Милашин износи 3 сулундара. У даљем току игре, Милашин увек износи по 2 сулундара. На тај начин после сваког његовог потеза број сулундара је дељив са 3, док после сваког Радашиновог потеза број преосталих сулундара при дељењу са 3 даје остатак 2. Јасно је онда да ће последњи сулундар изнети Милашин (**20 бодова**).