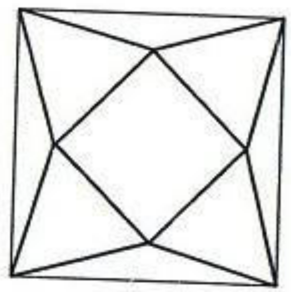
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа 06.04.2013 – VIII разред

1. У произвољном трапезу $ABCD$ основица DC је два пута мања од основице AB. Из темена B повучена је нормала BE на праву AD. Докажи да је $CE = CB$.

2. Мрежа правилне четворостране пирамиде је уцртана у квадрат странице $7\sqrt{2}$cm (види слику). Израчунај запремину те пирамиде ако су основна и бочна ивица у размери $6:5$.



3. Стана и Брана су кренуле једна у сусрет другој. Када је Стана прешла петину пута, а Брана 1300 метара растојање између њих било је три пута дуже од пута који је Стана прешла. Колико су биле удаљене једна од друге на почетку?

4. Дате су линеарне функције $y = 3x + a$, $y = -2x + b$ и $y = x + 1$. Изрази a у функцији од b ако графици ове три функције имају једну заједничку тачку.

5. Дата је једначина $8x + 3y = 2013$. Нека су $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ парови природних бројева који задовољавају дату једначину. Израчунај збир $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Права кроз C паралелна са AD сече основицу AB у средишту K. По Талесовој теореми, та дуж полови и дуж BE, а како је паралелна са AD, она је и нормала на BE. Дакле, CK је симетрала дужи BE, па је $CE = CB$ (**20 бодова**).

2. Обележимо са a, b, h и H, редом, дужине основне ивице, бочне ивице, апотеме и висине пирамиде. Тада из бочне стране пирамиде (једнакокраког троугла) следи да је $a : h = 6 : 4$ (**4 бода**). Нека је $a = 6x$, $h = 4x$. Важи да је $4x + 6x + 4x = 7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, (**4 бода**) односно $14x = 14$, па је $x = 1$. Дакле основна ивица ове пирамиде је 6cm, а апотема 4cm (**4 бода**). Висина пирамиде је $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $H = \sqrt{7}$cm (**4 бода**). Тражена запремина је $V = \frac{6^2\sqrt{7}}{3}$, $V = 12\sqrt{7}cm^3$ (**4 бода**).

3. (МЛ45/2) Означимо дужину укупног пута који су прешле са x. Пут који су обе прешле када је прва прешла петину пута, а друга 1300 метара, је $\frac{1}{5}x + 1300$ (**5 бодова**). Пут који им је остао да пређу до сусрета је $x - \left(\frac{1}{5}x + 1300\right)$ (**5 бодова**). Како је ово растојање три пута дуже од пута који је Стана прешла имамо да је $x - \left(\frac{1}{5}x + 1300\right) = \frac{3}{5}x$ (**5 бодова**). Решавањем ове једначине долазимо до траженог растојања од 6,5km (**5 бодова**).

4. Графици функција имају једну заједничку тачку, па следе једнакости $3x + a = x + 1$, $-2x + b = x + 1$, односно $2x = 1 - a$, $3x = b - 1$ (**8 бодова**). Сада је $x = \frac{1-a}{2}, x = \frac{b-1}{3}$, одакле је $\frac{1-a}{2} = \frac{b-1}{3}$ (**8 бодова**). Дакле, тражена веза је $3a + 2b = 5$, тј. $a = \frac{-2b+5}{3}$ (**4 бода**).

5. Како је $8x + 3y = 2013$, то је $8x = 3\,(671 - y)$, па је $x = 3k$ (**5 бодова**). Сада је $24k = 3\,(671 - y)$, одакле је $y = 671 - 8k$ (**5 бодова**). Како је $x_n > 0$ и $y_n > 0$, то је $k > 0$ и $671 - 8k > 0$, па је $0 < k < 83\frac{7}{8}$ или $1 \le k \le 83$ (**5 бодова**). Дакле, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3 + 6 + \ldots + 3\cdot 83 = 3\cdot(1 + 2 + \ldots + 83) = 10458$ (**5 бодова**).