Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
VIII РАЗРЕД

1. Одреди растојање координатног почетка од графика функције
$$y = -2x + 2.$$

2. Реши једначину
$$|2013 - ||2012 - x| - 2011|| = 0.$$

3. Ивица четворостране једнакоивичне пирамиде *SABCD* је a. Тачке P, Q, M, N су средишта бочних ивица AS, BS, CS и DS, редом, а тачка O је подножје висине пирамиде из врха S. Израчунај површину и запремину тела *OPQMNS*.

4. Да ли се коцка ивице 13cm може исећи на 2012 мањих коцки чије су ивице 1cm, 2cm или 3cm?

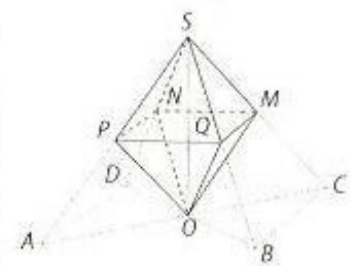
5. Нека је *ABCD* правоугаоник са страницама a и b ($a > b$). Кружнице уписане у троуглове ABC и ACD додирују дијагоналу AC у тачкама M и N. Одреди дужину дужи MN.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

1. (МЛ 44-4) Осе координатног система и график формирају троугао чије су катете 1 и 2 (**5 бодова**). Тражено растојање је висина која одговара хипотенузи овог троугла. Хипотенуза овог троугла је $\sqrt{5}$ (**5 бодова**). Како је површина овог троугла 1, висина која одговара хипотенузи, а самим тим и тражено растојање, је $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (**10 бодова**).

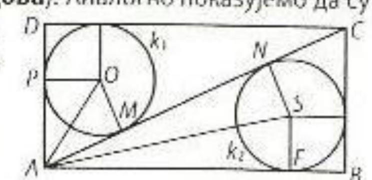
2. $||2012 - x| - 2011| = 2013$ па је $|2012 - x| - 2011 = 2013$ или $|2012 - x| - 2011 = -2013$ (**5 бодова**). Сада је $|2012 - x| = 4024$ док је случај $|2012 - x| = -2$ немогућ (**5 бодова**). Дакле имамо $2012 - x = 4024$ или $2012 - x = -4024$ па је $x = -2012$ (**5 бодова**) или $x = 6036$ (**5 бодова**).

3. Висину пирамиде рачунамо као катету правоуглог троугла OBS. Како је $BS = a$ и $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то је $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (**5 бодова**). $PQ = QM = MN = NP = \frac{a}{2}$ (средње линије једнакостраничних троуглова странице a). $PS = QS = MS = NS = \frac{a}{2}$ (половине ивица дужина a). $PO = QO = MO = NO = \frac{a}{2}$ (средње линије троуглова и паралелне са страницом дужине a) (**5 бодова**). Дакле, тело *OPQMNS* се састоји од две једнакоивичне четворостране пирамиде странице $\frac{a}{2}$ које су спојене по основи. Површина тела се састоји од осам троуглова и једнака је $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (**5 бодова**). Запремина је једнака $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ (**5 бодова**).



4. Нека је x број коцки ивице 1cm, y број коцки ивице 2cm и z број коцки ивице 3cm. Тада је $x + 8y + 27z = 13^3$ и $x + y + z = 2012$ (**5 бодова**). Одузимањем друге једначине од прве добијамо $7y + 26z = 185$. Како је $0 \le 26z \le 185$, то је $0 \le z \le 7$. Само у случају $z = 2$ имао да је $y = 19$, а заменом у првој једначини $x = 1991$. Дакле, могуће је расећи дату коцку на 2012 мањих и то 1991 коцку чија је ивица 1cm, 19 коцки чија је ивица 2cm и 2 коцке чија је ивица 3cm (**15 бодова**).

5. Означимо са k_1 круг уписан у троугао ACD, а са k_2 круг уписан у троугао ABC. Означимо са P тачку додира круга k_1 и странице AD, а са F тачку додира круга k_2 и странице AB. Троуглови AFS и ANS су подударни јер је $AS = AS$, $SN = SF = r$, $\measuredangle SFA = \measuredangle SNA = 90°$ па је $AN = AF = a - r$ (**10 бодова**). Аналогно показујемо да су троуглови APO и AMO подударни па је $AM = AP = b - r$. Сада је $MN = AN - AM = a - b$ (**10 бодова**).



Признавати и максималним бодовати свако тачно решење које није у кључу.