Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

12.02.2011.

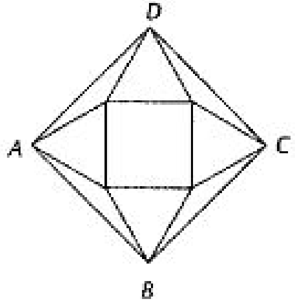
VII РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 : \left(20\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-(-2)^2\cdot\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2}\right)$.

2. Одреди узајамно просте бројеве x и y такве да је

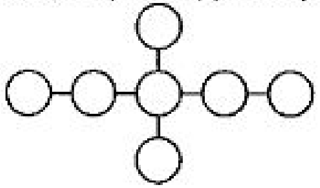
$$\frac{x}{y}=-0{,}20112011\ldots \quad \text{(2011 се понавља).}$$

3. Над страницама квадрата странице $a=4\text{cm}$ конструисани су једнакостранични троуглови. Докажи да је четвороугао $ABCD$ квадрат. Види слику!



4. Реши једначину $\sqrt{x^2}=x+5$.

5. Прецртај слику на папир који ћеш предати! Попуни кружиће са слике бројевима $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ тако да збир последњих цифара бројева у пет кружића водоравно буде једнак са збиром последњих цифара бројева у три кружића усправно.

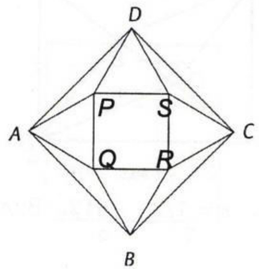


Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

1. -1

2. Нека је $a=-0{,}2011\,2011\ldots$. Тада је $10000\,a=-2011{,}2011\,2011\ldots$. Сада је $10000\,a-a=-2011$, па је $9999\,a=-2011$, односно $a=-\frac{2011}{9999}$. Како је 2011 прост број, то су бројеви 2011 и 9999 узајамно прости, па су решења: $x=-2011, y=9999$ или $x=2011, y=-9999$.

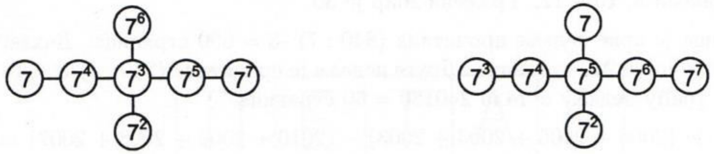
3. Означимо темена почетног квадрата са P, Q, R и S. Сви унутрашњи углови конструисаних троуглова су једнаки и сви углови квадрата су прави, па је $\angle APD=\angle DSC=\angle CRB=\angle BQA=150°$. Како је $AP=PD=DS=SC=CR=RB=BQ=QA$, то су и сви троуглови APD, DSC, CRB и BQA подударни и једнакокраки (једнаки по два пара страница и углови између тих страница). Из подударности ових троуглова следи да је $AB=BC=CD=DA$. Како су сви унутрашњи углови четвороугла $ABCD$ прави (састоје се од унутрашњег угла једнакостраничног троугла и два угла на основици једнакокраких троуглова од по 15°) то је тражени четвороугао квадрат.



4. Полазна једначина је еквивалентна са $|x|=x+5$. Разматраћемо случајеве када је $x\geqslant 0$ и $x<0$. Ако је $x\geqslant 0$, тада је $|x|=x$, па полазна једначина има облик $x=x+5$ и она нема решења. Ако је $x<0$, тада је $|x|=-x$ и полазна једначина има облик $-x=x+5$, одакле долазимо до решења $x=-2{,}5$.

5. Последње цифре бројева $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ су редом $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3$. Број 1 не може бити у средини, јер је збир осталих бројева 38, што подељено са 2 даје 19, а 19 се не може добити као збир два броја из овог низа.

Ако је 3 у средини, збир осталих бројева је 36, а половина од тога је 18. Те бројеве можемо распоредити тако да су цифре 9 у вертикалном реду, а остале бројеве у водоравним кружићима. Постоје и друга попуњавања, ако се промене места бројева који се завршавају истом цифром. Таквом распореду бројева одговара решење на слици а).



Ако је 7 у средини, збир преосталих бројева је 32. Пошто $7+9=16$, та два броја стављамо вертикално, а остале бројеве водоравно. Таквом распореду бројева одговара решење на слици б).
Ако би 9 било на средини, и усправно и водоравно би требало да остали бројеви дају збир 15, што није могуће.