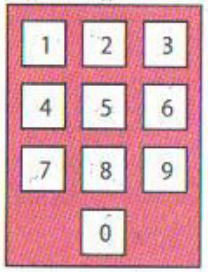
2010 ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ

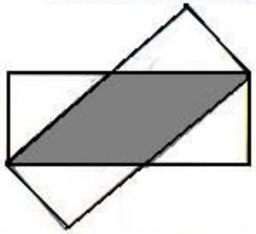
VII разред

1. Ако је x природан број већи од 1 и $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$, колико је $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ и x?

2. Типке на телефону су распоређене тако да је растојање између центара 2 суседне типке 12mm (суседне су типке које су лево, десно, горе или доле од посматране). Да ли је најкраћа путања која је „повучена прстом" када бирамо број Друштва математичара Србије 0113036818, рачунајући да притискамо увек тачно у центар типке, дужа од 21cm?



3. Два подударна правоугаоника који се преклапају као на слици имају странице дужине 5cm и 12cm. Израчунај површину осенченог дела.



4. Да ли постоји n-тоугао код кога је укупан број дијагонала за 2010 већи од броја страница?

5. Одреди последњу цифру броја $\frac{44^{44}}{2}$.

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}+2=\frac{100}{9}=\left(\frac{10}{3}\right)^2$. Зато је $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$. Слично, из $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2$ следи $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$. Сабирањем последње две једнакости је $2x=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=6$, па је $x=3$.

2. Нека је растојање суседних типки $x=12\,\mathrm{mm}$. Из Питагорине теореме растојање између бројева 0 и 1 је једнако $\sqrt{x^2+(3x)^2}=x\sqrt{10}$. Растојање између типки 1 и 1 је једнако 0, док је растојање имеђу типки 1 и 3 је једнако $2x$. Користећи симетрију добијамо да је најкраћа црта која је „повучена прстом" дужине $x\sqrt{10}+0+2x+x\sqrt{10}+x\sqrt{10}+x+x\sqrt{2}+x\sqrt{5}+x\sqrt{5}$, односно $3x\sqrt{10}+2x\sqrt{5}+x\sqrt{2}+3x$. Сада процењујемо

$$12(3\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+3)>12(3\cdot 3+2\cdot 2{,}2+1{,}4+3)=12\cdot 17{,}8=213{,}6,$$

па је најкраћа црта дужа од $210\,\mathrm{mm}$.

3. Због симетрије осенчени део је ромб, који има висину $5\,\mathrm{cm}$. Нека је страница паралелограма једнака a. Из Питагорине теореме добијамо $(12-a)^2+5^2=a^2$, односно $a=\frac{169}{24}$. Сада је површина осенченог дела управо једнака $a\cdot h=\frac{169}{24}\cdot 5$, $P=\frac{845}{24}\,\mathrm{cm}^2$.

4. Укупан број дијагонала n-тоугла једнак је $\frac{n(n-3)}{2}$. Из услова задатака добијамо једнакост $\frac{n(n-3)}{2}=n+2010$. Сређивањем се добија $n(n-5)=4020=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Бројеви n и $n-5$ дају исти остатак при дељењу са 5, па је производ дељив са 25 или није дељив са 5. Производ $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ је дељив само са 5, па једначина $n(n-5)=4020$ нема целобројно решење, односно такав многоугао не постоји.

5. Последња цифара броја 44^n је 4 или 6, зависно од того да ли је n непарно или парно. Према томе последња цифра броја 44^{43} је 4, а последња цифра броја 44^{44} је 6. Како је

$$\frac{44^{44}}{2}=44^{43}\cdot\frac{44}{2}=44^{43}\cdot 22$$

и последња цифра броја 44^{43} је 4, последња цифра датог броја је 8.