Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
05.04.2009.

VII РАЗРЕД

1. Докажи да је број $4^9+6^{10}+3^{20}$ квадрат неког природног броја.

2. Израчунај површину правоуглог троугла чији је обим 36cm, ако за странице тог троугла важи $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$ (a и b су катете, c хипотенуза).

3. Нека је $m=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+57$. Одреди све природне бројеве n за које је број m квадрат неког природног броја.

4. Од квадрата су одрезана 4 правоугла троугла тако да је добијен правилан осмоугао. Израчунај површину тог осмоугла ако је страница квадрата 10cm.

5. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

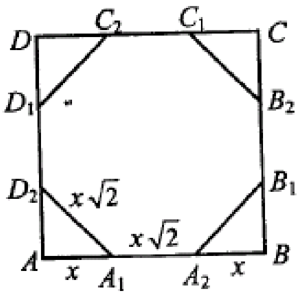
РЕШЕЊА – VII РАЗРЕД

1. $4^9+6^{10}+3^{20}=\left(2^2\right)^9+2^{10}\cdot3^{10}+\left(3^{10}\right)^2=\left(2^9\right)^2+2\cdot2^9\cdot3^{10}+\left(3^{10}\right)^2=\left(2^9+3^{10}\right)^2$
(20 бодова)

2. **(МЛ, XLIII-4)** Обим правоуглог троугла је $O=a+b+c=36$cm. Како је $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$, то додавењем броја 1 левој и десној страни добијамо $\frac{a+b+c}{c}=\frac{12}{5}$ **(5 бодова)**. Заменом $a+b+c=36$ у $\frac{a+b+c}{c}=\frac{12}{5}$ добијамо $\frac{36}{c}=\frac{12}{5}$, одакле је $c=15$ **(5 бодова)**. Сада из $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$ закључујемо да је $a+b=21$ **(5 бодова)**, а $a^2+2ab+b^2=441$. На основу Питагорине теореме је $a^2+b^2=225$, па заменом у $a^2+2ab+b^2=441$ добијамо $ab=108$. Како је $P=\frac{ab}{2}$ то је тражена површина 54cm^2 **(5 бодова)**.

3. За $n=1$ је $m=58$, за $n=2$ је $m=59$, за $n=3$ је $m=63$, па n није 1, 2 или 3. За $n=4$ је $m=81=9^2$ **(12 бодова)**. Како за $n>4$ цифра јединица броја m је 7, само број 4 испуњава услове задатка **(8 бодова)**.

4. Троуглови које смо одсекли су једнакокрако правоугли **(3 бода)**. Претпоставимо да је катета тог троугла x. Питагорином теоремом добијамо да је страница осмоугла $x\sqrt{2}$ **(3 бода)**. Како је страница a квадрата састављена од две катете троугла и једне странице осмоугла, то је $a=2x+x\sqrt{2}$. Сада је
$$x=\frac{10}{2+\sqrt{2}}=5\left(2-\sqrt{2}\right)\text{cm} \quad \textbf{(5 бодова).}$$



Површину осмоугла добијамо када од површине квадрата одузмемо површине троуглова које смо одрезали, па је
$$P=P_k-4\cdot P_\Delta=100-4\cdot\frac{25\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}=200\left(\sqrt{2}-1\right)\text{cm}^2 \quad \textbf{(9 бодова).}$$

5. Једна цифра је 5, а друга мора бити дељива са 3 (3, 6, 9) **(5 бодова)**.
1) Ако је једна цифра 5, друга дељива са 3, а трећа није дељива ни са 3 ни са 5, укупан број могућности је $6\cdot3\cdot5=90$ (3 цифре на 3 позиције можемо распоредити на 6 начина, 3 цифре су дељиве са 3 и 5 цифара није дељиво ни са 3 ни са 5) **(5 бодова)**.
2) Ако је једна цифра 5, а свака од две преостале цифре је дељива са 3, укупан број могућности је $3\cdot3\cdot3=27$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина и за сваку од преостале 3 цифре имамо 3 могућности) **(5 бодова)**.
3) Ако су 2 цифре 5, а трећа дељива са 3 укупан број могућности је $3\cdot3=9$ (цифру дељиву са 3 можемо распоредити и одабрати на по 3 начина). Дакле укупан број могућности је 126 **(5 бодова)**.