2006 ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ

1. Одредити скуп свих целих бројева a за које је $\frac{a^2}{a+3}$ цео број.

2. Израчунати површину ромба чији је обим 36 cm, а збир дужина дијагонала 20 cm.

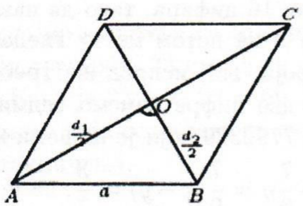
3. Одредити све двоцифрене бројеве $\overline{ab}$ чији је корен једнак $a+\sqrt{b}$.

4. Израчунати дужину странице правилног дванаестоугла уписаног у круг чији је полупречник дужине R.

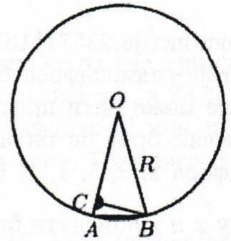
5. Колико има петоцифрених бројева који се исто читају и са леве на десну и са десне на леву страну?

1. Из једнакости $\frac{a^2}{a+3} = \frac{a^2-9}{a+3} + \frac{9}{a+3} = a - 3 + \frac{9}{a+3}$ следи да је $\frac{a^2}{a+3}$ цео број једино ако је $\frac{9}{a+3}$ цео број, односно ако $a+3 \in \{-9,-3,-1,1,3,9\}$. Тражени скуп је $\{-12,-6,-4,-2,0,6\}$.

2. Нека је тачка O пресек дијагонала датог ромба $ABCD$ (слика). Обележимо са a, d_1 и d_2 дужине (у cm) странице и дијагонала ромба. Обим ромба је 36 cm, па је $a=9$. Дијагонале ромба се полове и нормалне су једна на другу, па применом Питагорине теореме на троугао ABO добијамо да је $(\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2 = a^2$, тј. $d_1^2 + d_2^2 = 324$. На основу услова $d_1 + d_2 = 20$ имамо да је $400 = (d_1+d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = 324 + 2d_1d_2$, што значи да је $d_1d_2 = 38$. Према томе, површина датог ромба је $19\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 2



Сл. уз задатак 4

3. Из једнакости $\sqrt{\overline{ab}} = a + \sqrt{b}$ добијамо да је $10a + b = (a+\sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$, односно $10a = a^2 + 2a\sqrt{b}$. Како је $a \neq 0$, следи да је $a = 10 - 2\sqrt{b}$. То значи да је $\sqrt{b}$ цео број, па b може бити само 0, 1, 4 или 9. Налажењем одговарајуће вредности за a и провером датог услова добијамо да су тражени бројеви: 49, 64 и 81.

4. Нека је O центар датог круга, ABO карактеристични троугао правилног дванаестоугла, а BC висина тог троугла. Како је $\measuredangle AOB = 30°$, следи да је $|BC| = \frac{R}{2}$, $|OC| = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $|AC| = R - R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Применом Питагорине теореме на троугао ABC добијамо да је тражена дужина странице правилног дванаестоугла $|AB| = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5. Тражени бројеви су облика $\overline{abcba}$. Тих бројева има колико и троцифрених бројева $\overline{abc}$, тј. $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.